Teil 2: Kurven und Flächen

Parametrische Objekte

Kurven und Flächen

Kurven: 1D-Objekte

Flächen: 2D-Objekte,
basierend auf Kurven

Kurven

Welche Form der Darstellung?

Beispiel: 2D-Linie

- Explizit: $y = k \cdot x + d$ $\quad \mathbf{x} = (x, y)^T$
- Implzit: $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$
  auch: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}$ $\quad \mathbf{n} = (a, b)^T$
  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = -c$
- Parametrisch: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{p} + t \cdot \mathbf{v}$ $\quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$

Parametrische Kurven (1)

Definition:

- $\mathbf{x}(t)$ – Punktdef. in Abh. von kontinuierlichen Parameter t
- $\mathbf{x}(t)$ & $t \in [a,b] \Rightarrow$ parametrische Kurve
- Startpunkt $\mathbf{x}(a)$, Endpunkt $\mathbf{x}(b)$
- Beispiel: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{p} + t \cdot \mathbf{v}$ (Linie)

Tangente in $\mathbf{x}(t)$:

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$ = Ableitung von $\mathbf{x}$ nach t
- Beispiel: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}$ (Tangentenvektor)

Parametrische Kurven (2)

2 Stetigkeitsqualitäten:

- mathematisch: $\dot{\mathbf{x}}(t)$ restriktiver
- geometrisch: $\dot{\mathbf{x}}(t) / |\dot{\mathbf{x}}(t)|$ schwächer

Attribute höherer Ordnung:

- Krümmung
- Torsion

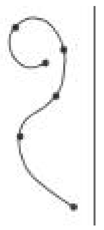
Arten von Kurven

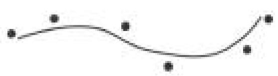
Interpolierende Kurven:

- Kurve geht durch vorgegebene Punkte $\mathbf{p}_i$

Approximierende Kurven:

- Kurve wird von Punkten $\mathbf{p}_i$ beeinflußt





Attribute von Kurven

Kurvenpunkte:

- Startpunkt, Endpunkt
- Kurvenevaluation

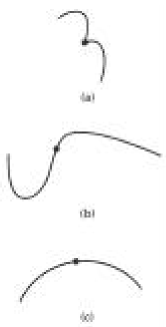
Tangenten:

- Startrichtung, Endrichtung
- Tangenten an beliebigen Kurvenpunkt

Stetigkeit: geometrisch, mathematisch

Grad: Differenzierbarkeit, smoothness

Spline-Kurven: Stetigkeiten



(a) C^0-Stetigkeit

(b) C^1-Stetigkeit

(c) C^2-Stetigkeit

Polynominterpolation

Gegeben: Anzahl von Punkten

Gesucht: Interpolierendes Polynom

- $p(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \ldots + q \cdot x^n$
- 2 Punkte – Linie: $n = 1$
- 3 Punkte – Quadratisch Kurve: $n = 2$

Berechung:

- Lösung eines linearen Gleichungssystems

Beurteilung:

- Überschwingen (–), nur gut, wenn n klein

Spline-Kurven (1)

Kombination aus Teilkurven

Kontrollpunkte werden:
- approximiert
- interpoliert

Einfluß der Kontrollpunkte:
- global: Bézier-Kurve
- lokal: B-Spline-Kurve

Unterschiedlicher Grad

Spline-Kurven: Beispiele

2 Bsp. f. kubische Spline-Kurven

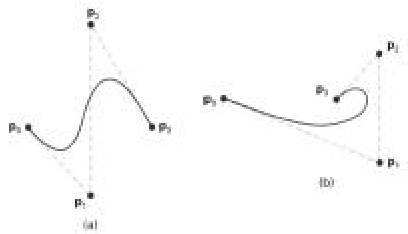


Figure 10-23
Control-graph shapes (dashed lines) for two different sets of control points.

Spline-Kurven (2)

Ansatz:
- Zusätzlich zu Kontrollpunkten $\mathbf{b}_i$ auch:
- Einflußfunktionen: Basis-Funktionen $B_{i,n}$

Definition:
- $\mathbf{b}(t) = \Sigma_{0 \leq i \leq n} \mathbf{b}_i \cdot B_{i,n}(t)$

Beispiel:
- Bernstein-Polynome (Bézier-Kurve)

Spline - convex hull property

Kurve bleibt i. d. konvexen Hülle

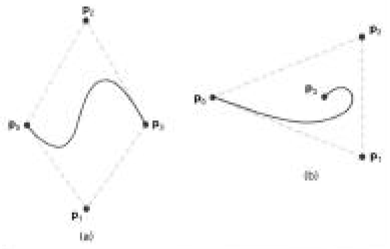


Figure 10-22
Convex-hull shapes (dashed lines) for two sets of control points.

Bézier-Kurven (1)

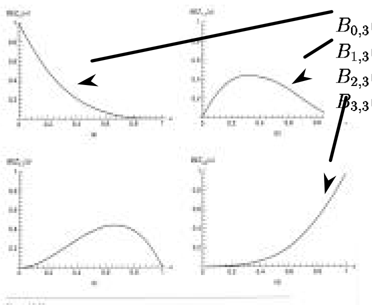
Spline-Approximation:

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i \cdot B_{i,n}(t) \qquad 0 \le t \le 1$$

Bernstein Polynome:

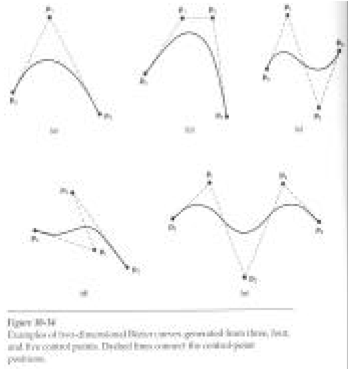
$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$$

Kubische Bézier-Kurven – Bernsteinpolynome



$$\begin{aligned} B_{0,3}(t) &= (1-t)^3 \\ B_{1,3}(t) &= 3\,t \cdot (1-t)^2 \\ B_{2,3}(t) &= 3\,t^2 \cdot (1-t) \\ B_{3,3}(t) &= t^3 \end{aligned}$$

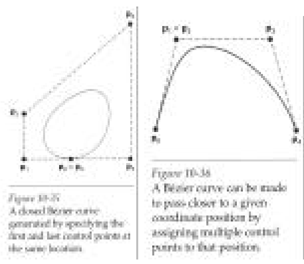
Bézier-Kurven: Beispiel



Bézier-Kurven (2)

Design mit Bézier-Kurven:

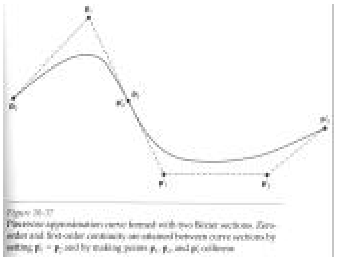
- closed Bézier curves
- multiple control points



Bézier-Kurven (3)

Design mit Bézier-Kurven

- Bézier verbinden (C^0, C^1 Stetigkeit)



Bézier-Kurve: Algorithmen

De Casteljau-Algorithmus:
- Evaluation bei Parameter t
- Rekursiver Ansatz

Degree elevation:
- Mehr Kontrollpunkte, selbe Kurve

Subdivision:
- Teilung der Kurve, bzw. Kurvenevaluation

Nächste Stufe: B-Spline Kurven

Bézier-Kurven: globaler Einfluß

Brauchbarer: B-Spline Kurven:
- Jeder Kontrollpunkt hat nur lokalen Einfluß
- Grad unabhängig von Anzahl der Pkte.

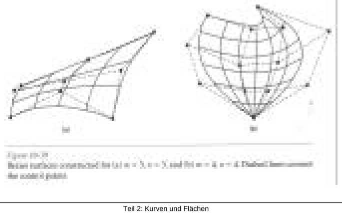
Rationale Kurven:
- Erweiterung von Bézier-Kurven und B-Spline Kurven
- Ein Gewicht pro Kontrollpunkt
- NURBS = „Standard“ in CAD, CAGD, etc.

Bézier-Patch (1)

Kartesisches Produkt v. Bézier-Kurven

$$\mathbf{b}(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{i,j} \cdot B_{i,n}(u) \cdot B_{j,n}(v) \qquad 0 \le u,v \le 1$$

(m+1)x(n+1) Kontrollpunkte



Bézier-Patch (2)

Eigenschaften wie Bézier-Kurve

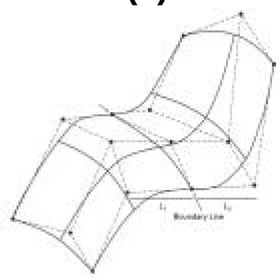


Figure 10-48
A composite Bézier surface constructed with two Bézier sections, joined at the indicated boundary line. The dashed lines connect specified control points. First-order continuity is established by making the ratio of length L_1 to length L_2 constant for each collinear line of control points across the boundary between the surface sections.

Quadric Surfaces (1)

Definition "quadrics":

- Gleichung 2-ter Ordnung

Beispiel: Kugel

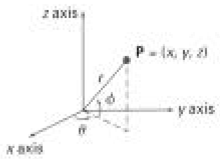


Figure 10-8
Parametric coordinate position (r, θ, ϕ) on the surface of a sphere with radius r.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\phi \cdot \cos\theta \qquad \pi \le \theta \le \pi \\ y &= r \cdot \cos\phi \cdot \sin\theta \qquad \tfrac{\pi}{2} \le \phi \le \tfrac{\pi}{2} \\ z &= r \cdot \sin\phi \end{aligned}$$

Quadric Surfaces (2)

2. Beispiel: Ellipsoid

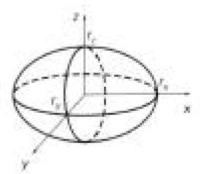


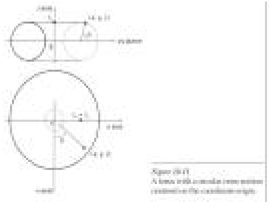
Figure 10-10
An ellipsoid with radii r_x, r_y, and r_z centered on the coordinate origin.

$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{z}{r_z}\right)^2 = 1$$

$$\begin{aligned} x &= r_x \cdot \cos\phi \cdot \cos\theta \qquad \pi \le \theta \le \pi \\ y &= r_y \cdot \cos\phi \cdot \sin\theta \qquad \tfrac{\pi}{2} \le \phi \le \tfrac{\pi}{2} \\ z &= r_z \cdot \sin\phi \end{aligned}$$

Quadric Surfaces (3)

3. Beispiel: Torus



$$\left(r - \sqrt{\left(\frac{x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_y}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{r_z}\right)^2 = 1$$

$$\begin{aligned} x &= r_x \cdot (r + \cos\phi) \cdot \cos\theta & \pi \le \theta \le \pi \\ y &= r_y \cdot (r + \cos\phi) \cdot \sin\theta & \pi \le \phi \le \pi \\ z &= r_z \cdot \sin\phi \end{aligned}$$